経営の科学 〜オペレーションズ・リサーチ〜

成島　康史
東京理科大学　数理情報科学科

オペレーションズリサーチ (Operations Research, OR) は 20 世紀半ばイギリスで行われた「戦略研究」から端を発している．後にアメリカに伝わり意思決定及び経営の科学として浸透していき，現在，経営工学をはじめとした幅広い分野で活用されている．

そもそも OR とはどのようなものを指すのだろうか．OR には明確な定義はないが，あえて定義をするならば，意思決定を行うために

1. 調査を行い問題となる点を明らかにする
2. 明らかになった問題を定式化する
3. 定式化された問題を解く

という手順を踏み，意思決定に必要な**計量的な指針**を与える，という一連の作業のための数理的な手法や，それに関わる数理科学全般をさす学術分野である，ということができるだろう．

OR を実践するにあたっては，1. から 3. を順に行っていくのだが，実際は，定式化が妥当でない場合などはモデルの解が現実とかけ離れてしまい，また 2. に戻る，つまり，1. → 2. → 3. → 2. → 3. → ⋯ →意志決定となったり，一つの意思決定が新たな意思決定問題を発生させ，1. → 2. → 3. →意志決定→ 1. → 2.⋯ となったりする．このように循環的に手順が行われることから，これを OR サイクルと呼ぶ (図 1 参照).

OR では，定式化されるモデルによって解くための手法が大きく異なるため，モデルによって分類される．たとえば，意思決定を合理的に行う上での考え方を整理し，意思決定のプロセスを明示化する「評価・決定モデル」，与えられた制約条件の下で評価関数を最適化（最小化/最大化）する「数理計画モデル」，不確実な要素を含んだ現象を解析し，計画・設計などに役立てる「確率的モデル」などがある．ここでは，数理計画モデルの中の線形計画モデルと評価・決定モデルの中の階層的意思決定 (AHP) モデルを例題を通して解説する．

線形計画モデル

例) 生産量の決定

3 種類の原料 A,B,C を用いて 4 種類の製品 P1–P4 を作る．各製品一単位あたりにの作成に必要な原料の量，各原料の利用可能量，各製品の単位当たりの利潤は表 1 に与えられている．このとき利潤を最大にするように生産量を決めるにはどうすればよいだろうか．このとき製品 P1–P4 の生産量を x_1–x_4

	P1	P2	P3	P4	利用可能量
A	3	5	2	8	525
B	2	7	4	10	450
C	6	5	3	6	700
利潤	4.5	5	3.7	6	

で表わすと，上の問題は次のように定式化できる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 4.5x_1 + 5x_2 + 3.7x_3 + 6x_4 \\
\text{制約条件} & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 525 \\
& 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 10x_4 \le 450 \\
& 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \le 700 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0
\end{array}
$$

このような，線形の制約条件のもとで線形の目的関数を最大化 (最小化) するような最適化問題を線形計画問題と呼ぶ．線形計画問題は，単体法や内点法などといった数値解法により，効率的に解けることが知られている．

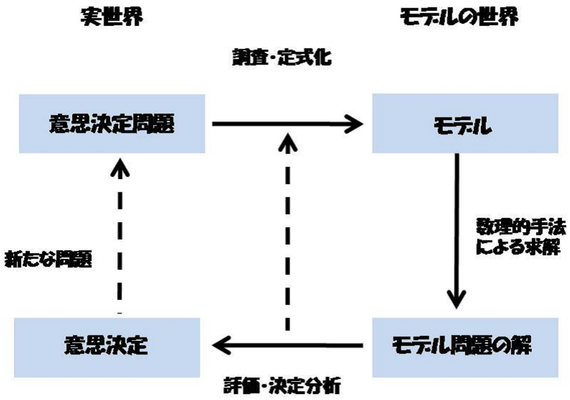

Figure 1: OR サイクル

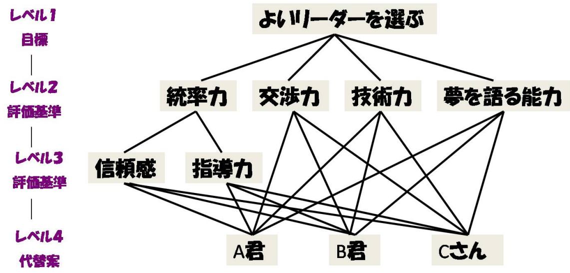

Figure 2: 階層的意思決定モデル

階層的意思決定 (AHP) モデル

例) プロジェクトリーダーの決定
同期入社の A 君，B 君，C 君の中からプロジェクトリーダーを一人決定したい．どのように決定すればよいだろう．

上の問題に対して AHP を用いてみよう．AHP では，まず問題を整理し，階層構造を描くことから始める．ここでは「良いリーダーを選ぶ」という目的のために図 2 のような階層構造を作成した．ここで各階層間の辺に，よいリーダーを選ぶ上での重要度を表す重みを付けることを考える．例えば,「良いリーダーを選ぶ」–「統率力」が 0.5, 「良いリーダーを選ぶ」–「交渉力」が 0.25 ならば,「良いリーダーを選ぶ」–「統率力」は「良いリーダーを選ぶ」–「交渉力」よりも 2 倍重要である，ということになる．ここではレベル 1–レベル 2 間の重みをつけてみよう，レベル 2 の 4 つ要素を要素 1–要素 4 と呼ぶこととし，行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \frac{\text{要素 } i \text{ の重要さ}}{\text{要素 } j \text{ の重要さ}} \quad a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

とする．このような行列を一対比較行列と呼ぶ．ここで一対比較行列を作成したところ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となったとしよう．重みを付けるために，影響力の最も大きい最大固有値の固有ベクトルを用いる．ここで，最大固有値に対応する (正規化された) 固有ベクトルは $(0.5008, 0.0793, 0.1400, 0.2799)^T$ となり，これらがそれぞれ要素 1–要素 4 に対応する重みとなる．このようにして書く階層間の辺のすべてに重みを付けることができたら，各代替案 (今の場合は A 君，B 君，C 君) への評価は

$$\text{各代替案への評価} = \sum \text{目標から各代替案へのパスの重みの積}$$

を用いて表すことができる．