フィンスラー幾何による物理の幾何学化

お茶の水女子大学 学部教育研究協力員
大塚隆巧

§ はじめに

リーマン幾何は力学や相対論に応用されて久しいですが，その自然な拡張であるフィンスラー幾何も，我々の身の周りや，物理のいろいろな分野に現れます．
今回は，以下の目次に沿って，特に，ラグランジュ力学系に現れるフィンスラー幾何についてお話し致します．

1. フィンスラー幾何とは?
2. フィンスラー空間の例
3. ラグランジュ形式の幾何
4. その他（経路積分，熱力学，場の理論）

注意：後述致しますが，ここでのフィンスラー幾何の定義は，一般的な数学書の定義よりも弱いものを使っています．通常のフィンスラー函数の定義では，物理への応用が非常に制限されてしまいます．

§ 1. フィンスラー幾何とは?

フィンスラー幾何とは，リーマン幾何の自然な拡張です．
空間内のベクトルや曲線に対して，“長さ”を定義できる一般的な幾何が，フィンスラー幾何です．ひと昔前は，一般計量幾何と呼ばれていました．

リーマン幾何とは，空間Mの点xとそこから無限小離れた点$x+dx$との間の，無限小距離dsが，リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて，dxの2次関数のルート：$ds=\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}$ と定義されるものでした．

フィンスラー幾何とは，無限小距離ds を，$ds=F(x,dx)$ で定義する幾何学です．xとdxの函数である F を，フィンスラー函数とか，フィンスラー計量と呼びます．ただし F は，xとdxのどんな函数でも良い訳ではありません．ホモジニティー条件と呼ばれる次の式を満足するものでしか，計量幾何学にはなりません．

ホモジニティー条件

$$F(x, \lambda dx) = \lambda F(x, dx),\ \lambda > 0$$

λ は定数を表しています，また純粋な数学においては，
フィンスラー函数は，正定値であるものを選びます．

リーマン多様体 (M, g) $\Rightarrow$ **フィンスラー多様体** (M, F)

$$M = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n)\}$$

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$$M = \{(x^0, x^1, \ldots, x^n)\}$$

$$F = F(x, dx) = F(x^\mu, dx^\mu)$$

リーマン計量

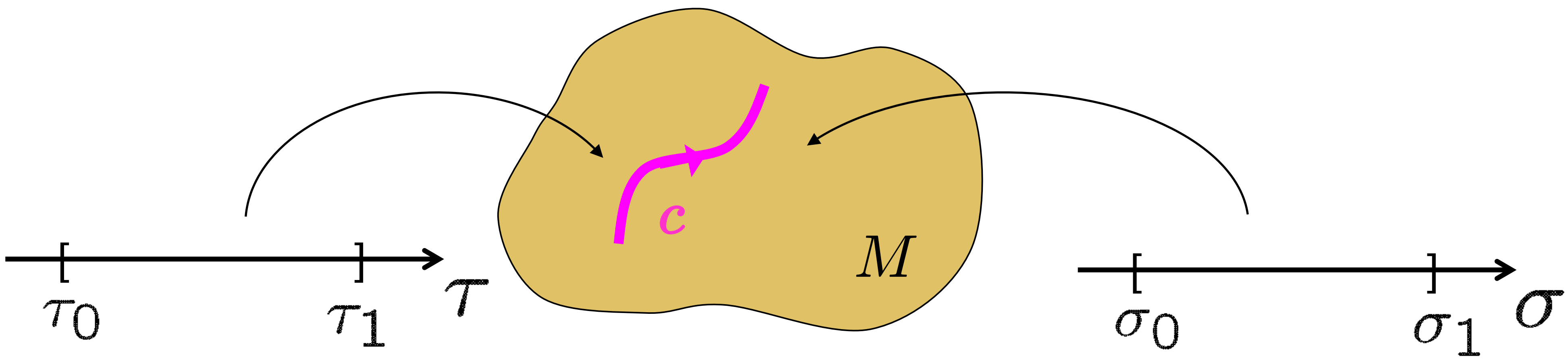
$$\left\| x \bullet\!\xrightarrow{\ dx\ } \right\| = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

フィンスラー計量（函数）

$$\left\| x \bullet\!\xrightarrow{\ dx\ } \right\| = F(x, dx)$$

ただし，F が幾何学的な長さを定義するには，ホモジニティー条件が必要!

フィンスラー構造＝有向曲線に距離を与える構造



幾何学的距離

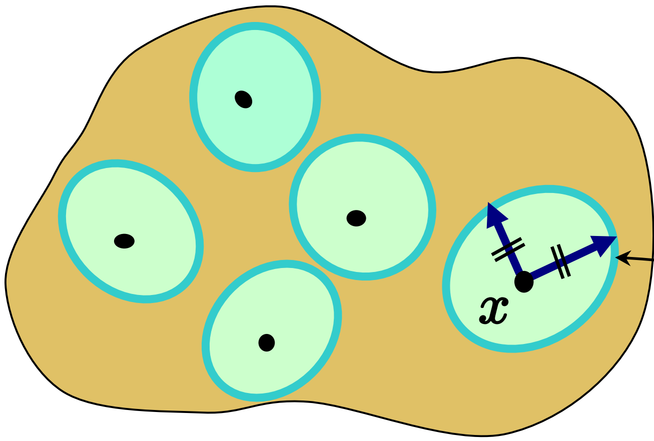
$$l[c] = \int_c F(x, dx) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x(\tau), \frac{dx}{d\tau}(\tau)\right) d\tau$$

パラメトリゼーションによらない

$$\begin{aligned} l[c] &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x(\tau), \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x(\sigma(\tau)), \frac{dx(\sigma)}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\tau}\right) d\tau \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} F\left(x(\sigma), \frac{dx(\sigma)}{d\sigma}\right) d\sigma \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x, \lambda dx) = \lambda F(x, dx),\ \lambda > 0}$$

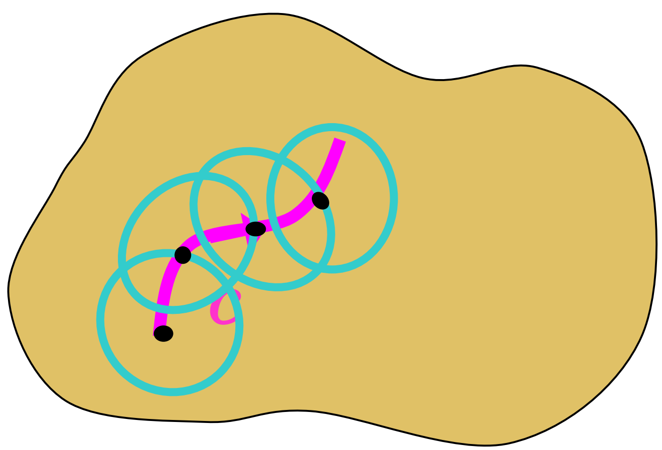
フィンスラー計量をもっと見やすくするために

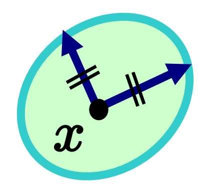


$$I_x = \{v \in T_xM ; F(x,v) = 1\}$$

Indicatrix（基準面）

Indicatrix：x点から距離1にある点を表した基準面

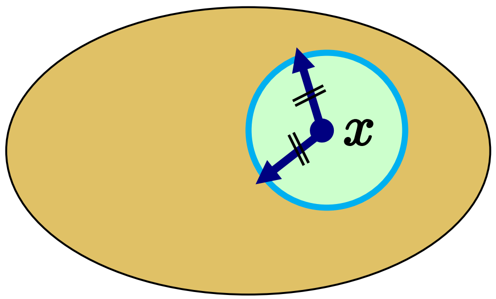




Indicatrixを用いて，
長さ，面積，角度を定義できる!
(Busemann, Tamassy)

§ フィンスラー空間の例

例）リーマン多様体



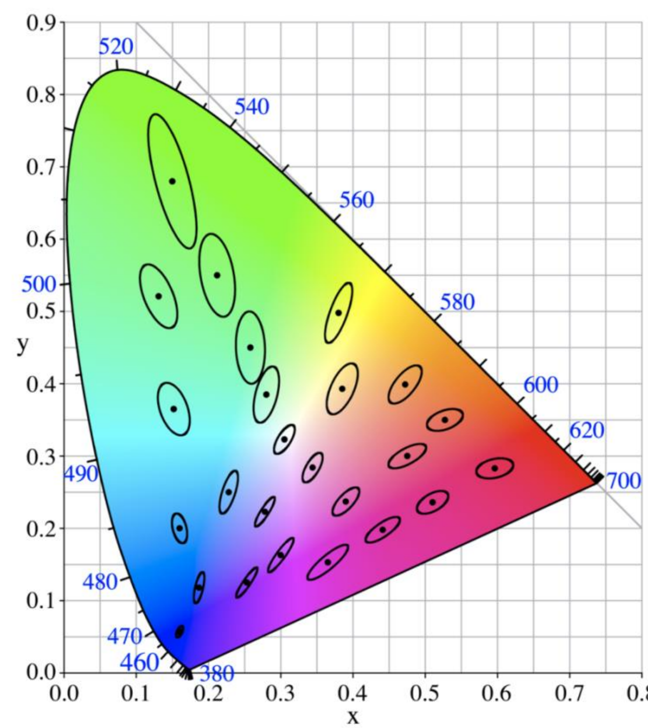
$$F(x, dx) = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}$$

リーマン多様体は,
indicatrixが2次曲線

⇨

フィンスラー多様体は,
indicatrixが“凸曲線”

例）色空間とMacAdamsの楕円



例）リーマンの挙げた例

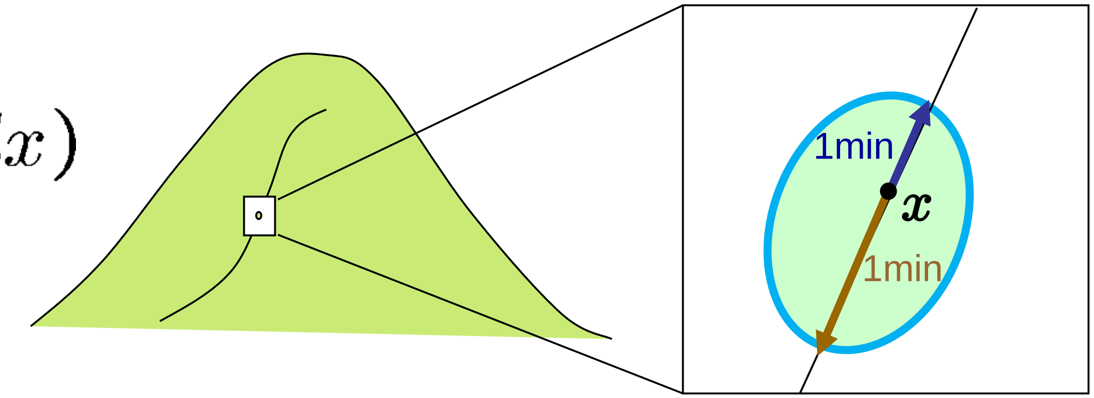
$$F(x, dx) = \sqrt[4]{g_{ijkl}(x)dx^i dx^j dx^k dx^l}$$

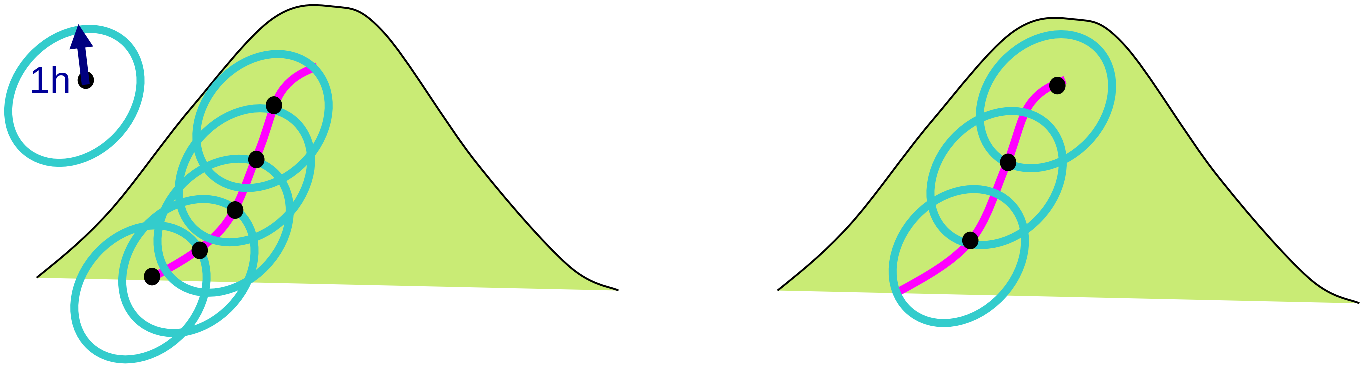
リーマン・フィンスラー計量

$$F(x, \lambda dx) = |\lambda| F(x, dx)$$

例）松本計量＝山登り降りの時間距離＝徒歩何分?距離

$$F(x, -dx) \neq F(x, dx)$$





登り時間（距離）　≠　降り時間（距離）

§ラグランジュ形式の幾何

幾何学でない！
共変的ではない!

配位空間とラグランジアン

$$(Q, L)$$

幾何構造がない

作用積分

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q^i(t), \dot{q}^i(t), t\right) dt$$

曲線$q(t)$のパラメトリゼーションに依存

$$M = \mathbb{R} \times Q \ni (t, q^i) \quad \Downarrow \quad F(x^\mu, dx^\mu) = L\left(x^i, \frac{dx^i}{dx^0}, x^0\right) |dx^0|$$

計量幾何学！
共変的!

拡大配位空間とフィンスラー計量

$$(M, F)$$

フィンスラー多様体

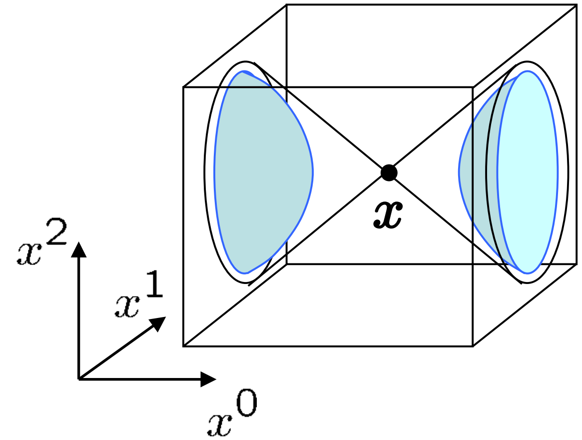
幾何学的作用積分

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[c] &= \int_c F(x^\mu, dx^\mu) \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} L\left(x^i(\tau), \frac{\dot{x}^i(\tau)}{\dot{x}^0(\tau)}, x^0(\tau)\right) |\dot{x}^0| d\tau \end{aligned}$$

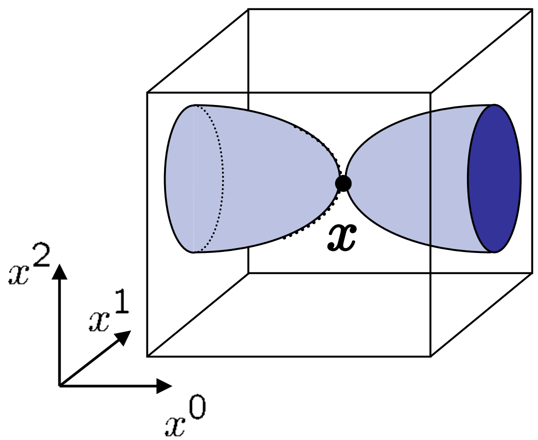
有向曲線（軌道）のパラメトリゼーションに依存しない

例）ミンコフスキー時空間=相対論的粒子

$$F(x,dx)=\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2}$$



例）非相対論的ポテンシャル系



$$F(x,dx)=\frac{m}{2}\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2}{|dx^0|}-V(x^0,x^1,x^2)|dx^0|$$

共変オイラー・ラグランジュ方程式

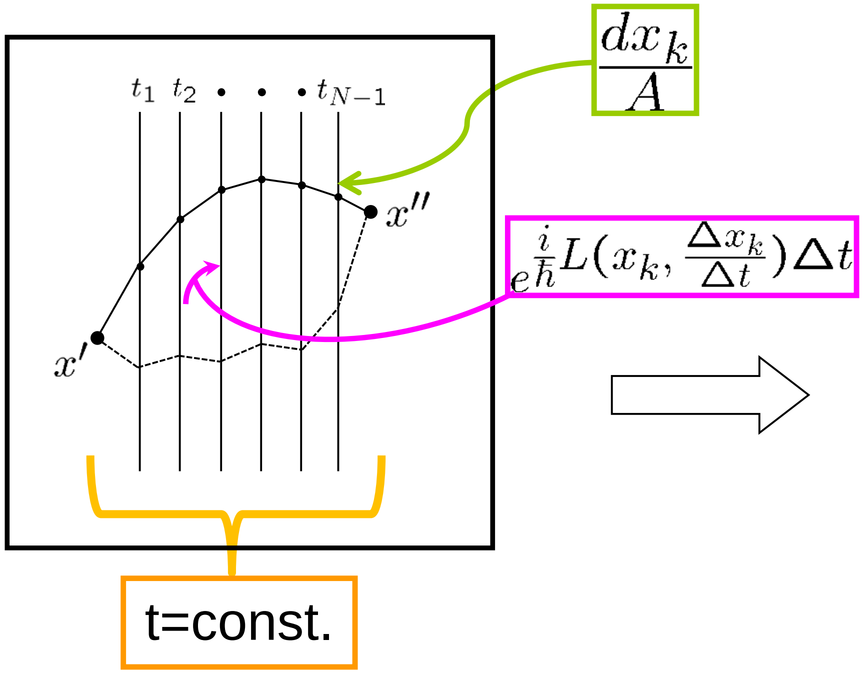
$$\mathcal{E}\mathcal{L}_\mu(F)=\frac{\partial F}{\partial x^\mu}-d\left(\frac{\partial F}{\partial dx^\mu}\right)=0$$

時間変数が自由に選択できる!

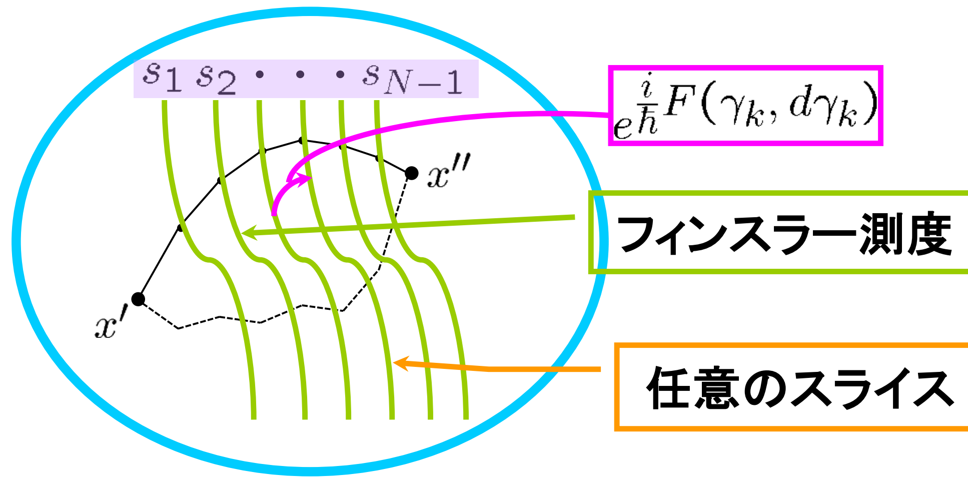
例）ランダース計量＝相対論的荷電粒子の系

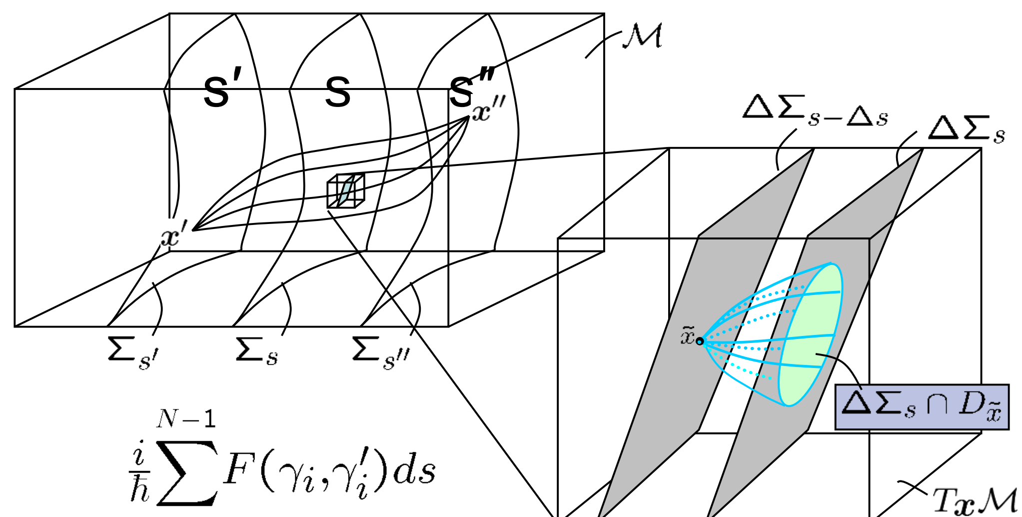
$$F(x,dx)=\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}+A_\mu(x)dx^\mu$$

§ その他（経路積分の幾何）



$\mathbb{R}\times Q$: フィンスラー多様体





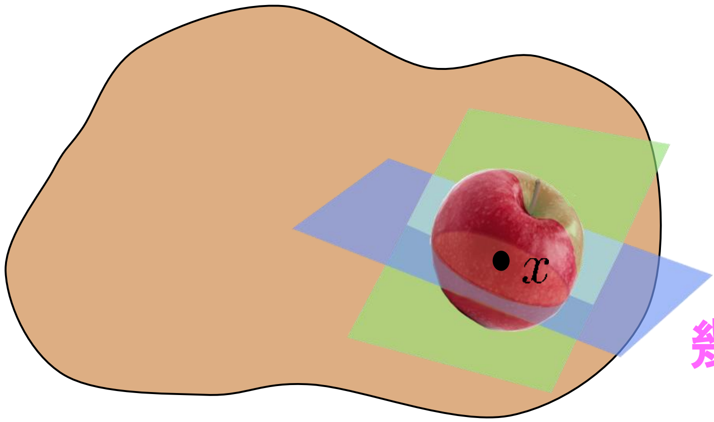
フィンスラー測度

$$\|\Delta\Sigma_s\|_F=\omega\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\|\Delta\Sigma_s\|_R}{\|\Delta\Sigma_s\cap D_{\tilde{x}}\|_R}$$

$$\int\delta C\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_C F}:=d\Sigma_1\int d\Sigma_2\cdots\int d\Sigma_{N-1}\,e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N-1}F(\gamma_i,\gamma_i')ds}$$

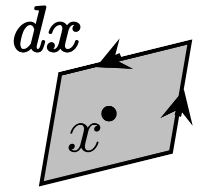
§ 場の理論

河口多様体 $(M,\,K)$



幾何学的面積

フィンスラー多様体の自然な拡張!



$$dx = (dx^{\mu\nu})$$

$$= K(x, dx)$$: 河口計量（函数）

ホモジニティー条件

$$K(x, \lambda dx) = \lambda K(x, dx),\ \lambda > 0$$

$$S[\boldsymbol{\sigma}] = \int_{W\subset\mathbb{R}^2} K\left(x^{\mu}(s,t), \frac{\partial(x^{\mu},x^{\nu})}{\partial(s,t)}\right) ds\wedge dt$$

場の拡大配位空間
と河口計量

$$(M, K)$$

河口多様体

幾何学的作用積分

$$\mathcal{A}[\boldsymbol{\sigma}] = \int_{\boldsymbol{\sigma}} K(x, dx)$$

$$= \int_W \mathcal{L}\left(x^{\mu}(s,t), \frac{\partial(x^{\mu},x^{\nu})}{\partial(s,t)}\right) \frac{\partial(x^0,x^1)}{\partial(s,t)} ds\wedge dt$$

計量幾何学！
時空間共変的!

有向曲面のパラメトリゼーションに依存しない

例1）2次元スカラー場　$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_x^2 - V(\phi)$

$$M = \{(t, x, \phi)\},\ K(x^\mu, dx^{\mu\nu}) = \frac{(dx^{21})^2 - (dx^{02})^2}{2dx^{01}} - V(x^2)dx^{01}$$

例2）南部・後藤作用　$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X^\mu}{\partial s}\frac{\partial X_\mu}{\partial s} - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial s}\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial s}}$

$$M = \{(X^0, X^1, \cdots, X^N)\},\ K(X^\mu, dX^{\mu\nu}) = \sqrt{-\frac{1}{2}dX^{\mu\nu}dX_{\mu\nu}}$$

共変オイラー・ラグランジュ方程式

$$\mathcal{E}\mathcal{L}_\mu(K) = \frac{\partial K}{\partial x^\mu} - d\left(\frac{\partial K}{\partial dx^{\mu\nu}}\right) \wedge dx^\nu = 0$$

時空間の選択が自由にできる!

共変ネーターの定理

$$L_v K = \left\{ v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + dv^\mu \wedge dx^\nu \frac{\partial}{\partial dx^{\mu\nu}} \right\} K = 0 \ \Rightarrow \ J = v^\mu \frac{\partial K}{\partial dx^{\mu\nu}} dx^\nu,\ dJ = 0$$

内部・外部空間の区別がない!　⇒　一般化（ソリトン）対称性
幾何学的な（キリング）条件!　　　重力のエネルギー・運動量

§ 文献の紹介

フィンスラー・河口幾何学は，実は日本にも縁がある分野です．
日本の草分けは，松本誠先生，河口商次先生です．
松本先生の本，「計量微分幾何学」（裳華房）が復刊されています．
この本には，フィンスラー幾何の他，河口幾何も紹介されています．

ラグランジュ形式が，フィンスラー幾何や河口幾何で書けることは，
T. Ootsuka, R. Yahagi, M. Ishida, and E. Tanaka,
“Energy-momentum conservation laws in Finsler/Kawaguchi Lagrangian formulation”, Class. Quantum Grav. 32 (2015)
に書かれています．

また，経路積分の測度がフィンスラー計量から誘導されることは，
T. Ootsuka and E. Tanaka,
“Finsler geometrical path integral”, Phys. Lett. A 374 (2010)
にあります．