学術研究ネットセミナー　報告

2014年3月16日（日）　東京セミナー学院

講演者：　田中 敏晶（芝浦工業大学、國學院大學、お茶の水女子大学）

題目：　量子力学の可解性の構造

本講演では量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式の固有値問題の可解性を特徴づける代数構造について説明した。

１．可解性とは？

数学的な問題を如何にして解くかという課題は、古代から現在に至るまで数学の発展上重要な動機を与え続けている。「古代ギリシアの三大作図問題」は典型的な例であり、今日では定規（直線）とコンパス（円）のみからなる作図では‘非可解’であることが知られている。無論解くための道具（概念）に対する制約を緩めれば‘可解’となる問題であるから、可解性とは解くために必要な新たな数学的概念の発見と密接に関係しているいことが分かる。

中学の数学で誰しもが教わった二次方程式の根の公式は、端的にこの方程式の可解性を示しており、洋の東西を問わず古代から様々な解法が知られていた。一方、二次よりも高次の代数方程式の代数的な解法は１６世紀になって端緒が開かれ、三次の場合はカルダノの公式、四次の場合はフェラーリの公式として今日知られている。その後、五次以上の場合の研究が続けられたが、１９世紀に入りアーベル-ルフィニの定理によって代数的には‘非可解’であることが証明され、その結果はさらにガロアによって体や群といった抽象的な数学概念を生み出す契機となった。

次に行列の固有値問題を考えてみよう。A を N 行 N 列の行列とするとき、$A\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{b}$ を満たす固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{b}$ の組を求める問題である。自明な $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つためには $A - \lambda$ が逆行列を持たないことが必要で、これは行列 $A - \lambda$ の行列式が 0 となることと等価である。この行列式は λ に関して N 次の代数式（多項式）となるので、固有値は N 次の代数方程式：

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{1}$$

の N 個の解で与えられることになる。このように行列の固有値問題は、性質のよく知られた代数方程式に帰着できるという意味で‘可解’である。

別の例として、定係数線形常微分方程式：

$$\frac{\mathrm{d}^N f}{\mathrm{d}x^N} + a_{N-1}\frac{\mathrm{d}^{N-1} f}{\mathrm{d}x^{N-1}} + \cdots + a_0 f = 0, \tag{2}$$

を考える。解の一つを $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ とおいて上式に代入すると、λ は再び N 次の代数方程式 (1) を満たさなければならないことが分かる。したがってその N 個の解を $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ とすれば、一般解は線形結合

$$f(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + C_N \mathrm{e}^{\lambda_N x}, \tag{3}$$

で与えられることになる。この場合も元の微分方程式が代数方程式に帰着できるので‘可解’である。このように、一見異なる問題も隠された既知の数学的構造が背後に存在することによって可解性を持ちうることが理解できよう。

２．量子力学とは？

物理学は身辺で起こる様々な自然現象を支配している規則性を探求することで発展している学問である。古代から蓄積されてきた天体観測や地上で起こる落下や投擲運動の観察を通して、まず物体の位置運動の法則が１７世紀に体系化されて力学が誕生した。その後１８００年にヴォルタによる化学電池の発明により電流を産み出せるようになって、電気と磁気に関する法則が１９世紀に電磁気学として完成された。一方、１８世紀からニューコメンの発明による商業用熱機関が普及後、ワットの改良により熱効率という問題意識が浮上、またラヴォアジェによって錬金術的な燃焼理論が今日的な化学反応理論に取って代わられ、燃焼から切り離された熱現象が研究対象となり、１９世紀になってエネルギーやエントロピーといった概念を産みながら熱力学が確立した。２０世紀に入る頃の大部分の科学者はこれらの体系で全ての自然現象が説明可能だと信じていたが、そのような楽観主義は２０世紀初頭に誕生した二つの新しい理論体系によって打ち砕かれる事になる。一つが相対論であり、もう一つが量子論である。

量子論は原子や分子のように目には見えない微視的な尺度の現象を記述する枠組みであり、特に日常的な尺度では粒子と考えられるような物質（電子など）の微視的な法則は量子力学と呼ばれる。それに対して量子論を用いなくても説明可能な非微視的尺度の物理体系は古典論と呼ばれる。古典論においては任意の時刻における物理量（観測で測定される量）は全て確定していると前提されているが、量子論では成立せずに高々確率的にしか予測できない。確率を支配するのは‘状態’という概念であり、状態が時間と共に如何に変化するかを決定するのがシュレディンガー方程式である。

$\psi(x)$ で表わされる一次元（直線上）の定常的な状態が満たすシュレディンガー方程式は、エネルギー E に関する固有値方程式

$$H\psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x), \tag{4}$$

となる。ここで$V(x)$は位置エネルギーで作用する力を決定し、Hはハミルトニアンと呼ばれ、古典的には力学的エネルギーに相当する。Hが行列であれば上述したように代数方程式に帰着できるが、ここでは微分などを含む演算子である。古典的なバネの運動に相当する単振動の場合は$V(x)=\frac{k}{2}x^2$で与えられ、方程式(4)は'可解'であることが知られている。その際特徴的なことは、解の組(ψ_n, E_n)が$n=0,1,2,\ldots$と無限に存在する点である。N行N列の行列の場合には、N次方程式の解としてN個の解が存在した訳であるから、Hはある意味で∞行∞列の行列で、∞次の代数方程式の解で与えられる、と考えることができるが、∞次の代数方程式の可解性とはどういうことであろうか？

３．そして構造！

1987年にTurbinerとUshveridzeによって

$$V(x)=(a^2-2M-3)x^2+2ax^4+x^6, \tag{5}$$

という位置エネルギーについて、Mが偶数$(M=2N)$か奇数$(M=2N+1)$の場合（Nは自然数)、解の組がN個だけ求められることを発見し、このような性質を'準可解性'と呼んだ。この発見によって、それまで知られていた無限個の解の組が求まる通常の可解性を新たな視点から捉え直す道が開かれることになった(Turbiner, '94)。いま、N個の既知関数φ_nの集合（ベクトル空間）を$\mathcal{V}_N=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$とするとき、もし$H\mathcal{V}_N\subset\mathcal{V}_N$が成り立てば、固有値方程式はこの$N$次元のベクトル空間$\mathcal{V}_N$の中で閉じて$N$行$N$列の行列の固有値問題になるので、$\mathcal{V}_N$の中では'可解'となる。したがって、

- 準可解性：　あるNに対して$\mathcal{V}_N$が求まる。
- 可解性：　任意のNに対して$\mathcal{V}_1\subset\mathcal{V}_2\subset\cdots\subset\mathcal{V}_N$を満たす集合$\mathcal{V}_n$の列が求まる。

といった定義づけが可能となる。

２００１年に我々の研究グループは、準可解性に対する更なる発展性のある発見をした。それは、N階の線形微分作用素：

$$P_N^-=\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N}+w_{N-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}}+\cdots+w_0(x), \tag{6}$$

を、$P_N\varphi_n=0$を任意の$\varphi_n\in\mathcal{V}_N$に対して満たすように構成し（これは常に可能である)、もし今考えている$H=H^-$とは別のハミルトニアンH^+が存在して$H^-P_N^-=P_N^-H^+$が成り立つとき以下のことが証明される。

- $H^-\mathcal{V}_N \subset \mathcal{V}_N$、よって H^- は準可解。

- $H^-\psi_n = E_n\psi_n \quad \Longrightarrow \quad H^+(P_N^-\psi_n) = E_n(P_N^-\psi_n)$、よって H^+ も準可解で、H^- と（ほぼ）等しい固有値の組を持つ。

- 逆も成立。

すなわち、「H^- が準可解 $\quad\Leftrightarrow\quad$ H^+ が存在して $H^-P_N^- = P_N^-H^+$」となる。さらにもう一つの微分作用素：

$$P_N^+ = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^N + \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{N-1} w_{N-1}(x) + \cdots + w_0(x), \tag{7}$$

を導入すると、

$$P_N^\mp P_N^\pm = 2^N \left(H^\pm - E_1\right) \ldots \left(H^\pm - E_N\right), \tag{8}$$

という式が成立する（$E_1, \ldots, E_N$ は $\mathcal{V}_N$ における H^- の固有値）。ここまでにあらわれた関係式は、冪零性を持つ二つのフェルミオン座標 $\psi^\pm$（$(\psi^\pm)^2 = 0, \psi^+\psi^- + \psi^-\psi^+ = 0$ を満たす）をさらに導入して三つの演算子：

$$\boldsymbol{Q}_N^\pm = P_N^\mp\psi^\pm, \quad \boldsymbol{H} = H^-\psi^-\psi^+ + H^+\psi^+\psi^-, \tag{9}$$

を定義すると、以下のような代数にまとめることができる。

$$\boldsymbol{Q}_N^\pm\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_N^\pm = 0, \quad \boldsymbol{Q}_N^+\boldsymbol{Q}_N^- + \boldsymbol{Q}_N^-\boldsymbol{Q}_N^+ = 2^N\left(\boldsymbol{H} - E_1\right)\ldots\left(\boldsymbol{H} - E_N\right). \tag{10}$$

これは $N = 1$ のときは超対称性 (Witten, '81) と等しいので、一般の N の場合にはその拡張と見做すことができ、我々は「N重超対称性」と呼んでいる。以上のことから、「準可解性 $\quad\Leftrightarrow\quad$ N重超対称性」が成立することとなり、一次元量子力学の可解性を (10) 式のような代数構造によって特徴づけられることが明らかとなった。

参考文献

- T. Tanaka, '$\mathcal{N}$-fold supersymmetry and quasi-solvability,' in Edit. M. B. Levy, *Mathematical Physics Research Development*, (Nova Science Publishers, Inc., NewYork, 2009), Chapter 18.

- T. Tanaka, 'Nonperturbative analyses beyond instantons,' in Edits. D. E. Hathaway and E. M. Randolph, *Focus on Quantum Mechanics*, (Nova Science Publishers, Inc., NewYork, 2011), Chapter 12.