

ブラックホール物理と熱力学

梅津光一郎
日本大学 理工学部

Abstract

ブラックホールの特性を理解するために、最も有用な考察の1つはブラックホール物理と熱力学を対応付けて考えることである。この考察はブラックホール熱力学と呼ばれている。ここでは、ブラックホール熱力学からの寄与を紹介すると同時に、ブラックホール熱力学が本当に熱力学の素養を有しているのか、熱力学の立場から再考する。

1 ブラックホール物理と熱力学

ブラックホールは一般相対性理論の帰結としてその存在が予言されている。特に、4次元時空においては一意性定理 [1] により、ブラックホールの特徴は質量、電荷、角運動、これら3つのマクロパラメータによって一意的に決定されることが知られている。この論文では議論を簡素化するために、ブラックホールの質量にのみ依存する Schwarzschild ブラックホールを一貫して用いることにする。また必要な場合を除いて自然単位系を採用することにする。このブラックホール時空を表す Schwarzschild 計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_H}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 r_H はブラックホールの中心から事象地平面までの距離、いわゆる Schwarzschild 半径 ($r_H = 2M$) を表す。この計量によって作り出される時空は、静的であること、そしてブラックホールの質量 M というマクロパラメータのみで記述されることに注意したい。

ここから先は、このブラックホールに関する幾つかの性質について説明する。まず、事象地平面上の表面重力 κ は、特に Schwarzschild の場合、

$$\kappa = \frac{1}{4M}, \quad (2)$$

によって与えられる。表面重力はブラックホールの質量のみによって決められ、次の2つのことが言える。「事象地平面上の表面重力は至るところで一定である¹」こと、そして、(2) から κ を0とするためには質量を無限大にする必要があるため、「(古典論では) 物理的な過程で表面重力を0とすることができない²」ことである。次に、事象地平面の表面積は球対称である Schwarzschild の場合、

$$A = 4\pi r_H^2 = 16\pi M^2, \quad (3)$$

によって与えられる。この式に対して全微分を行うと、

$$\left[dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA \right], \quad (4)$$

¹熱力学第0法則に対応。

²熱力学第3法則に対応。

というブラックホール物理におけるエネルギー保存則に対応する関係式が得られる³。また、質量 M_1 と M_2 を持つ2つのブラックホールが合体する場合を考えると、各々の面積を足し合わせた量よりも必ず大きい面積が得られることが示される：

$$16\pi M_1^2 + 16\pi M_2^2 \leq 16\pi(M_1 + M_2)^2. \quad (5)$$

一般に（古典的なプロセスにおいて）ブラックホール面積は決して減少しない⁴：

$$[\delta A \geq 0]. \quad (6)$$

これはブラックホール面積増大定理 [2] と呼ばれている。

上記の性質を熱力学を特徴付ける4つの法則と比較しながらまとめると、熱力学とブラックホール物理との間には類似性があり、「内部エネルギーと質量」、「温度と表面重力」、「エントロピーと面積」がそれぞれ対応していることが分かる。これらの対応関係に基づいて、Bekenstein は情報理論の観点からブラックホールがエントロピーを持つことを示唆した [3]。情報理論では、情報の損失はエントロピーの増加を意味する。ここでは、ある物体がブラックホールに落ち込むことを考える。物体がブラックホールに落ち込む前、我々は物体についての情報を知ることができるが、一度、物体がブラックホールに落ち込むと、その物体がどのような状態にあるのか我々は物体に対する全ての情報を失うことになる。この失われた情報がブラックホールのエントロピーの増加になると考え、ブラックホールが大きなエントロピーを持つことを提案した⁵。そして、そのエントロピーの増加が物体が落ち込むことによって増加するブラックホールの表面積の増加と結び付けた。彼はブラックホールがエントロピーを持つことは示唆したが、温度を持つことまでは提案しなかった。その理由はブラックホールの定義である「どんな粒子の放出を許さない閉鎖的な領域」であることに起因する。ブラックホールが温度を持つ場合、周囲の温度との比較によっては、熱吸収だけではなく、熱放射も説明しなければならない。Bekenstein はブラックホールの放射のメカニズムを説明するまでには至らず、ブラックホールが温度を持つことまでは言えなかった。

Bekenstein の論文 [3] を受けて Hawking はブラックホールの放射のメカニズムを探し、場の量子論の考察からブラックホール放射のメカニズムを考案した [4]。具体的には、Bogoliubov 変換を用いて粒子数の期待値が

$$\langle n \rangle_{\text{boson}} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega} - 1} \quad (7)$$

となることを示し⁶、これを温度 T における黒体放射スペクトルの式と比較すると、ブラックホールがある特別な温度

$$T_{\text{BH}} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad (8)$$

を持つ黒体のように振る舞うことが分かる。この特別なブラックホールの温度は、Hawking 温度と呼ばれている。Hawking によりブラックホール放射のメカニズムが明らかとなったため、ブラックホール物理と熱力学との間に完全な対応関係を与えることが可能となった。

2 ブラックホール熱力学の寄与

ブラックホールの温度が分かったので、ブラックホール熱力学を信じれば、熱力学第一法則 (4) からブラックホールのエントロピー S_{BH} も一意的に決定することができる：

$$dU_{\text{BH}} = T_{\text{BH}} dS_{\text{BH}}, \quad \Rightarrow \quad S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}. \quad (9)$$

³熱力学第1法則に対応。

⁴熱力学第2法則に対応。

⁵通常、情報は無次元量で表される。ブラックホールエントロピーもプランク定数を用い無次元に合わせている。

⁶ここでの結果は灰色体因子を無視している。

ここで、 U_{BH} はブラックホールの内部エネルギー ($U_{\text{BH}} = M$) を表す。

また、ブラックホール熱力学は現存する殆どのブラックホールが物質吸収優勢であることも説明する。実際、典型的なブラックホールの質量（太陽質量の 10 倍程度）を用いてブラックホールの温度を評価すると、宇宙背景放射の温度に比べて非常に低いことが示される。すなわち、着目系の温度が周囲の温度より低い。この場合、熱力学では高い温度から低い温度に向けて熱の移動が起こることが知られている。したがって、典型的なブラックホールは熱吸収が優勢であることが分かる。逆に、ブラックホールの温度が周囲に比べ高い場合も考えることができる。この場合、ブラックホールは吸収よりも放射優勢となることが期待される。Schwarzschild ブラックホールの熱力学的特徴として、熱容量（比熱）が負になることが挙げられる：

$$C(U) \equiv \lim_{d'Q \rightarrow 0} \frac{d'Q}{T(U + d'Q) - T(U)}, \quad \frac{d'Q = dU}{\rightarrow} \quad C_{\text{BH}} = -8\pi M^2 < 0. \quad (10)$$

したがって、放射優勢のブラックホールの場合、放射に伴いブラックホールは自身のエネルギー、すなわち、ブラックホール質量を減少させる。すると、(8) からブラックホールの温度はますます高くなり、ますます放射優勢となる。その結果、ブラックホールは最後には蒸発すると予想される。この現象は、裸の特異点や情報損失など、新たな問題を生じさせるが、現在のところこれらは量子重力理論の登場により解決されると期待されている。

さらに相対論の分野では、ブラックホールが蒸発するまでの時間などが Stefan-Boltzmann の法則を用いて実際に計算されており、例えば、宇宙初期に作られた 10^{11} [kg] 程度の質量を持つミニブラックホールの蒸発時間はおよそ 137 億年で、ちょうど今頃に蒸発することが予想されている。

3 ブラックホール熱力学再考

これまでブラックホール物理が熱力学と実際にどのような対応関係を持ち、ブラックホール熱力学から得られるブラックホールに対する理解や興味深い現象について述べてきた。しかしながら、ブラックホール熱力学が本当に熱力学たる素質を有しているかについては多少疑問を残している。

熱力学⁷は、かの Einstein に “Theory of principle” と言わしめ、彼は熱力学だけは正しい理論であるという信念の下、1905 年の 3 つの論文（相対論、光電効果、Brown 運動）の理論を構築したというエピソードがあるほどである [5]。平衡系の熱力学が対象とする物理は 2 つあり、1 つめは「平衡状態のマクロな性質」と 2 つめは「ある平衡状態から別の平衡状態への遷移」について議論することができる。

これから熱力学とブラックホール熱力学との相違点について説明するために、必要最小限の熱力学のエッセンスについて簡潔に述べていく。まず、熱力学は本質的に平衡状態とエントロピーについての要請（公理）だけで理論を構築することが可能である⁸。単純系のエントロピーは次のように要請される：

単純系のエントロピー S は、エネルギー U を含む幾つかの相加変数の組 U, X_1, \dots, X_t の関数である：

$$S = S(U, X_1, \dots, X_t) \quad (\text{単純系}). \quad (11)$$

この基本関係式（熱力学関数）により、系のマクロな熱力学的性質は完全に記述されることが知られている。すなわち、平衡状態はこれら相加変数によって一意的に決定され、例えば理想気体の場合、温度や圧力、状態方程式など満たすべき関係式が全て導出される。

熱力学の要請から得られる単純系のエントロピーに対する熱力学的定理として、次の 2 つの定理が与えられる：

⁷一言で熱力学と言っても、本来は平衡系の熱力学と非平衡系の熱力学に分類して議論する必要がある。というのも、平衡系の熱力学は皆さん御存知のように、量子力学の登場においても一切の修正を受けなかった非常に堅固な理論であるのに対し、非平衡系の熱力学は未だ限定的な状況下の理論しか出来ていない。ここでは、平衡系熱力学を議論の対象とする。

⁸これら要請についての詳細は [6] を見よ

— 熱力学の定理 1 —

単純系のエントロピーは、その自然な変数の 1 次同次関数である：

$$S(\lambda U, \lambda X_1, \dots, \lambda X_t) = \lambda S(U, X_1, \dots, X_t), \quad (\lambda: \text{任意定数}). \quad (12)$$

— 熱力学の定理 2 —

単純系のエントロピーは、その自然な変数について上に凸な関数である：

$$S(\lambda U_a + (1 - \lambda)U_b, \lambda X_a + (1 - \lambda)X_b) \geq \lambda S(U_a, X_a) + (1 - \lambda)S(U_b, X_b). \quad (13)$$

さて、これら熱力学の定理は Schwarzschild ブラックホールの場合、次のようになる。ブラックホールエントロピー (9) はブラックホール熱力学の基本関係式として

$$S_{\text{BH}} = S_{\text{BH}}(U_{\text{BH}}) = 4\pi U_{\text{BH}}^2 \quad (14)$$

のように書くことができる。この式はブラックホールの場合も同様に、エントロピーが質量、すなわち、内部エネルギーの関数として表されていることを意味する。このとき、上記の定理はそれぞれ

- 定理 1： ブラックホールエントロピーは、その自然な変数の “2 次同次関数” である。
- 定理 2： ブラックホールエントロピーは、その自然な変数について “下に凸な関数” である。

となる。そして、定理 1 からの帰結としてブラックホールエントロピーは相加性を持たないことが示される。そもそも、このブラックホール熱力学の内部エネルギー U_{BH} は相加変数となっているのかという問題も生じる。熱力学では、複合系の内部エネルギーをマイクロ系のエネルギー表式において

$$U = \sum_i U^{(i)} + \sum_{i \neq j} U_{\text{int}}^{(ij)} \quad (15)$$

として記述される。ここで、 $U_{\text{int}}^{(ij)}$ は部分系 (i) と別の部分系 (j) の間の相互作用エネルギーを表す。第 1 項のみで記述されているのであれば、内部エネルギーは相加変数であると言えるが、第 2 項がマクロに見て無視できない場合にはこの問題が生じることが知られている。特に、長距離相互作用の場合には注意が必要となる。通常、粒子間に働く万有引力は他の相互作用と比べ非常に小さいために無視されているが、ブラックホールの場合にはきちんと考慮する必要があるだろう。

このように平衡熱力学に限った場合においても、熱力学とブラックホール熱力学には本質的な違いがあることが分かる。ここでは一部の相違点だけに注目したが、今後はより詳細にこれら相違点を明確にしていく必要があると考えている。そして、さらに重要なことは、このような相違点を有しながらも、何故、ブラックホール熱力学が熱力学の基本的な 4 つの法則を満たすのか、これらの対応関係をもたらす背後の物理は何かを明らかにすることだと考える。

References

- [1] B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971).
- [2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).
- [3] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [4] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [5] M. J. Klein, Science, **157**, 509 (1967).
- [6] 清水明, 「熱力学の基礎」東京大学出版会 (2007).